

Метод обнаружения некоторых компонентов гравитационного шума.

А.В Крамаренко О.А. Савенко

Легко видеть, что сигналы гравитационной волны, зарегистрированные прямым методом с помощью антенн на свободных массах [1], представляют собой ограниченные во времени фрагменты ЛЧМ (линейно-частотно-модулированных [2]) последовательностей, которые в свою очередь модулированы по амплитуде.

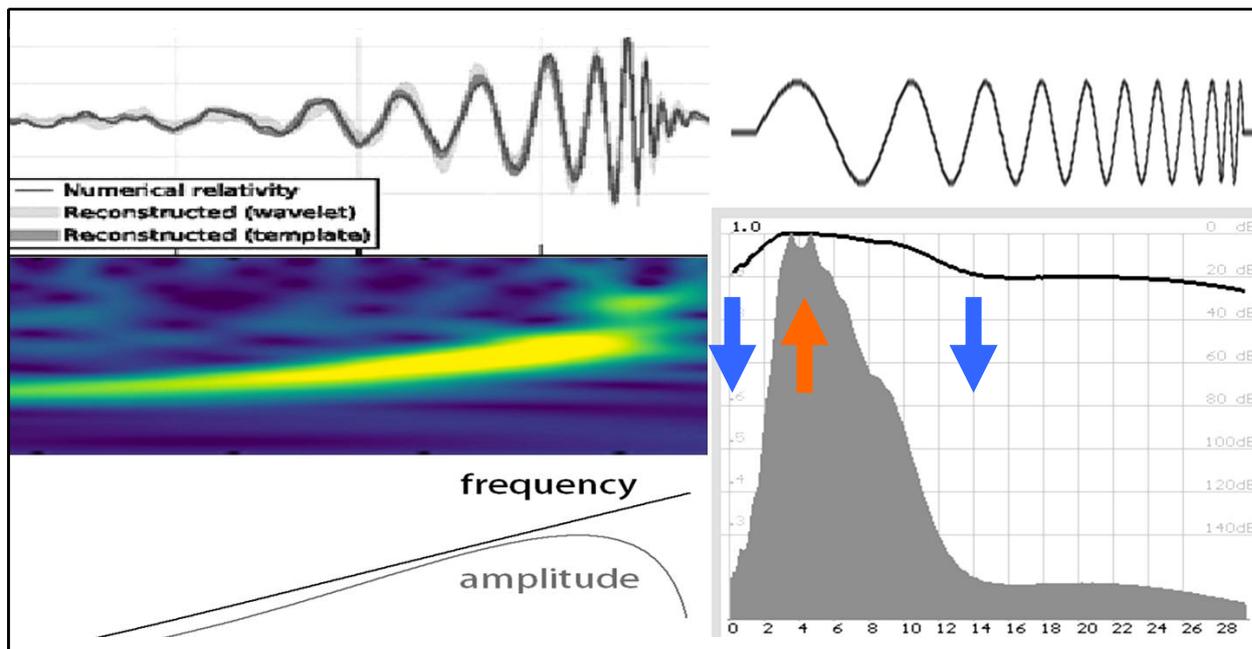


Рис.1. Сигнал гравитационной волны, его спектрограмма и приблизительная оценка мгновенных значений частоты и сглаженных значений амплитуды (слева). ЛЧМ сигнал и его энергетический спектр в линейном и логарифмическом масштабах (справа).

Уровень регистрируемых в настоящее время сигналов ГВ обычно превышает аппаратный шум не более чем на 26 дБ, причем такие мощные гравитационные сигналы наблюдаются довольно редко. Менее мощные сигналы появляются намного чаще, но их регистрация невозможна вследствие низкого соотношения сигнал/шум. Современными теориями предполагается, что таких событий за предыдущие миллионы лет должно было произойти много, и следы гравитационных волн в виде шума присутствуют в регистрируемом приемником входном сигнале. Но высокий (относительно входных сигналов) уровень собственного шума аппаратуры мешает их обнаружению. В свою очередь, снижение шумов приемника с антеннами на свободных массах почти достигло предела [3], и дальнейший прогресс будет требовать затрат, растущих экспоненциально.

Единственно возможным в данном случае способом улучшения соотношения сигнал/шум может быть только когерентное накопление сигналов [4]. Разумеется, во временной области выполнить его категорически невозможно вследствие неопределенности моментов появления сигналов на входе, а также разнообразия частотных характеристик различных гравитационных феноменов.

Обратим внимание, что этот запрет не распространяется на частотную область [5]. Исходя из того, что для оценки гравитационного шума не требуется точного описания сигнала во временной области и достаточно лишь спектральных данных, то использование классического метода спектрального оценивания с длинной реализацией и низколепестковым окном данных на первый взгляд представляется перспективным. Однако большие вычислительные затраты, избыточное разрешение по частоте (что, в общем-то, еще можно скомпенсировать) и значительная вероятность «пропуска цели» вследствие возможности попадания короткого во времени гравитационного события в крайние области окна данных, снижают ценность метода.

В то же время спектральный анализ модифицированным методом Уэлча [6] с половинным «перехлестом» косинусквдратных окон и когерентным (в частотной области) накоплением сколь угодно большого числа реализаций свободен от этих недостатков.

Учитывая тот факт, что зарегистрированные в настоящее время ГВ имеют невысокое соотношение сигнал/шум, и это затрудняет процесс анализа, синтезируем математическую модель «чистого» сигнала и вычислим его энергетический спектр методом ДПФ (в данном случае используется равнолепестковое окно Хэмминга). Затем добавим к сигналу белый гауссов шум и вновь вычислим спектр.

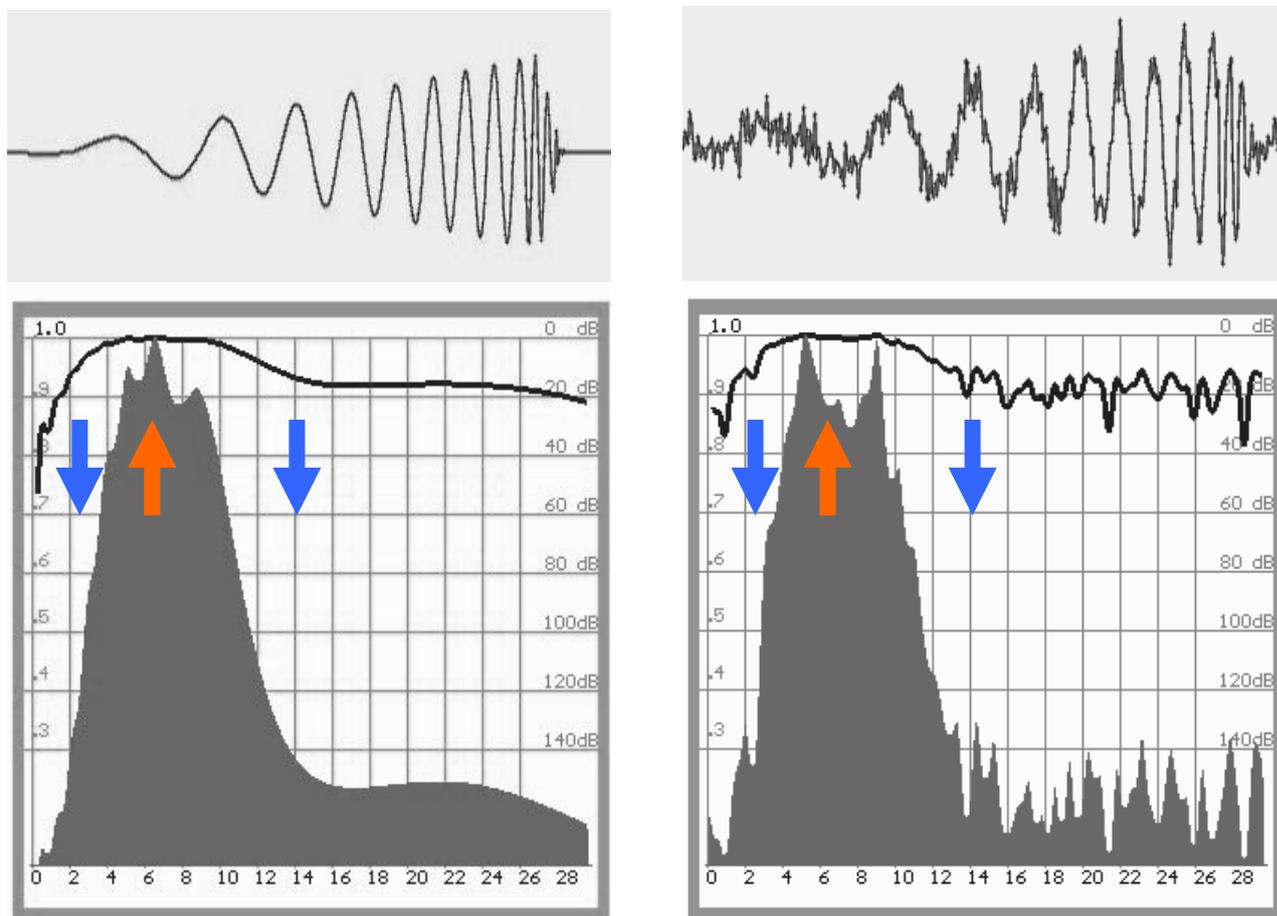


Рис.2. Модель сигнала (слева) представлена во временной области. Ниже показан ее нормированный энергетический спектр (черной линией данные в децибелах, серым полем показаны амплитудные значения). Справа та же модель с аддитивным нормально распределенным белым шумом -20 дБ.

Если модель корректна, то спектры сигналов гравитационных волн должны иметь характерные признаки в виде повышения спектральной плотности мощности на 10-18 дБ в диапазоне 2...15 условных единиц частоты. АБГШ уровня -20 дБ, добавленный к модели, изменяет спектр не существенно – именно так и выглядят нефильтрованные сигналы ГВ, зарегистрированные прямым методом.

Предполагаем, что на входе приемника постоянно существует сумма множества гравитационных волн, имеющих логнормально распределенные амплитудные значения и произвольный фазовый сдвиг [7]. Считаем, что ГВ не взаимодействуют между собой, во всяком случае, существующая теория ничего подобного не предусматривает. В сущности, не имеет значения точный вид функций амплитудного и фазового распределения суммируемых на входе сигналов, т.к. при отсутствии строгой закономерности взаимного фазового сдвига, сумма спектров большого количества реализаций будет стремиться к форме спектра единичной волны (NB!). Тогда возможен поиск компонентов именно гравитационного шума на фоне собственных шумов приемника. Соотношение мощностей этих шумов будет улучшаться пропорционально количеству накопленных реализаций. Учитывая, что спектр шума приемника может быть получен экспериментально, появляется возможность

выделения «неаппаратурных» шумов методом простого сопоставления спектров, т.е. «вычитания» спектра шумов приемника. Разумеется, эта операция допустима лишь в частотной области.

Итак, будем считать, что шум, образуемый одновременно (в пределах времени регистрации) существующими сигналами гравитационных волн, должен иметь спектр, который при увеличении числа наблюдений стремится к спектру «типичной» волны. Примем как аксиому, что вследствие отсутствия взаимодействия ГВ между собой (т.е. мультипликативных эффектов нет), суммирование их сигналов будет происходить только на входе приемника. Тогда процесс легко поддается моделированию (аналитические выкладки опускаются как тривиальные).

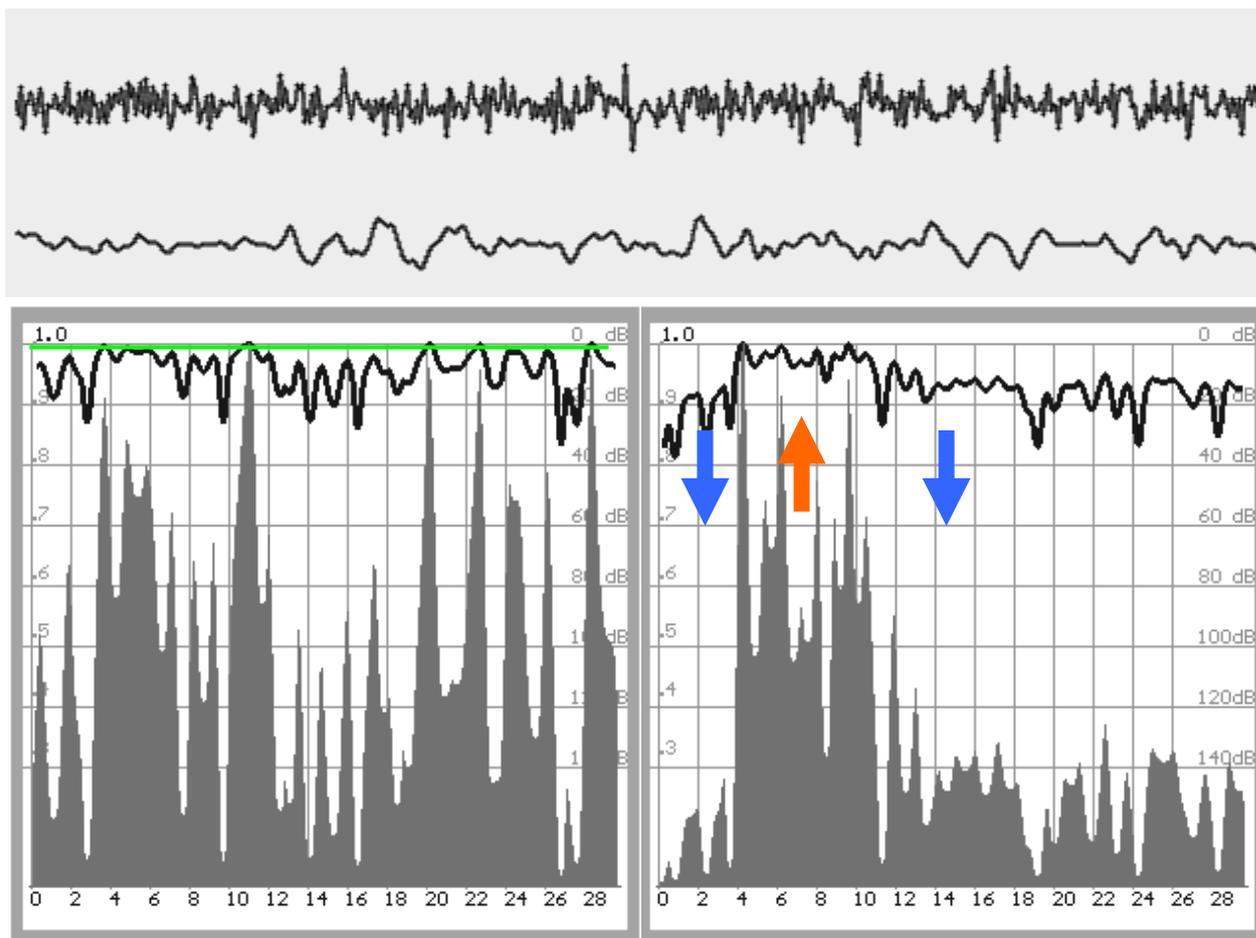


Рис. 3. Единичная реализация нормально распределенного белого шума (сверху) и его энергетический спектр (слева). Вторая кривая – результат некогерентного суммирования 1024 разноамплитудных моделей гравитационной волны со случайной начальной фазой. Справа – спектр этого процесса.

Как и ожидалось, спектральная плотность мощности модели гравитационного шума имеет повышение в том же диапазоне, что и при анализе единичной модели ГВ. Теперь для улучшения соотношения сигнал/шум будем использовать накопление спектральных данных, т.е. моделировать работу предлагаемого метода оценки гравитационного шума. Необходимо указать (тоже как аксиому) что любое отклонение спектра сигнала от спектра шума приемника и будет искомым гравитационным фоном, т.к. ничего другого кроме гравитационных сигналов, приемник на свободных массах принимать не должен.

Не имея возможности провести натурный эксперимент, воспользуемся описанной программной моделью. Пусть есть аддитивная смесь аппаратурного и «гравитационного» шумов при соотношении -12 дБ для «полезного сигнала». Разумеется, никакое разделение во временной области невозможно, спектральные оценки отдельных реализаций также не позволят обнаружить никаких аномалий.

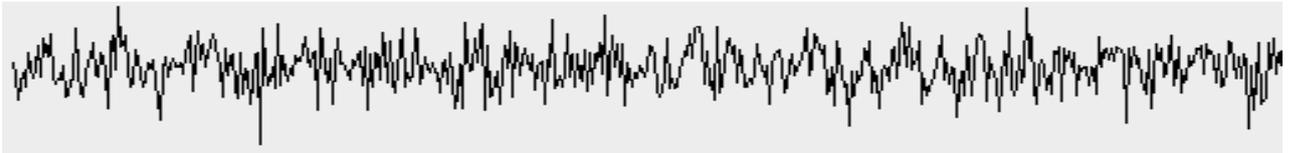


Рис. 4. Смесь БГШ и сигнала, составленного из компонентов разноамплитудных моделей гравитационных волн со случайной начальной фазой. Сигнал, кстати, визуально очень похож на шум современных приемников гравитационных волн.

Однако если провести накопление спектров большого количества реализаций, то компоненты «гравитационного» шума начнут постепенно проявляться.

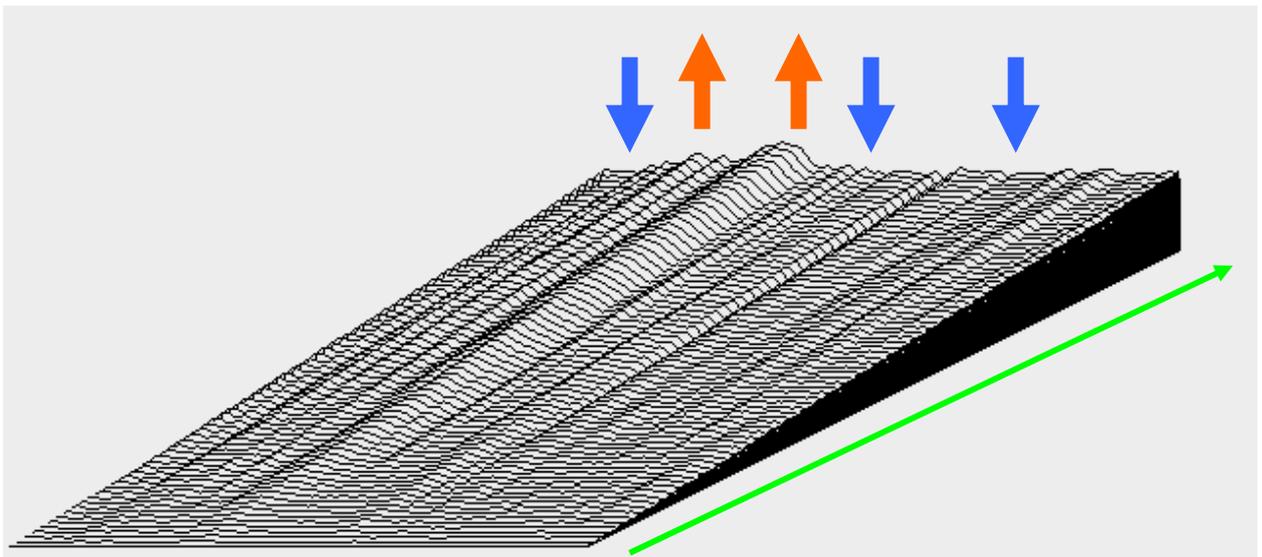


Рис. 5. Накопление 256 спектров: масштаб линейный, данные амплитудные. Зеленой стрелкой показана временная шкала регистрации, красными стрелками – появляющиеся компоненты, характерные для спектра модели гравитационной волны.

Продолжая накопление данных можно получить все более точную селекцию спектральных компонент. Увеличим количество реализаций до 2048.

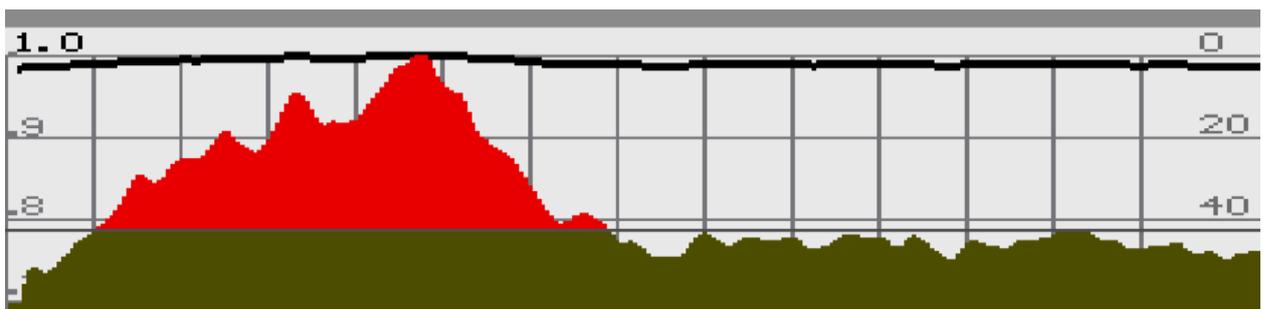


Рис. 6. Результат накопления данных 2048 реализаций: несмотря на выигрыш «над шумом» всего на 1.92 дБ, обнаружение признаков «гравитационного» шума можно считать статистически достоверным, несмещенным и состоятельным. Имеющийся «пьедестал» АБГШ может быть исключен из анализа.

Итак, если гравитационный шум действительно существует, и его спектр отличается от спектра собственного шума приемника, а его мощность составляет -12 дБ, то для достоверного обнаружения аномалии потребуется 2048 реализаций длительностью 0.5 секунд каждая. Если учесть пятидесятипроцентное перекрытие окон по Уэлчу, то 512 секунд работы аппаратуры будет достаточно.

Разумеется, увеличение времени наблюдения позволяет получить более точные результаты спектрального оценивания. Кроме того, применение дополнительного низколепесткового окна данных также может способствовать селекции аппаратурных шумов и внешних сигналов.

Следует также учесть, что последовательность данных в каждой спектральной линии представляет собой процесс во временной области, для которого могут быть вычислены моменты высших порядков. Т.е. если спектральная компонента при увеличении количества накопленных реализаций стремится к своему математическому ожиданию, то получение данных о дисперсии или эксцессе процесса будет пригодным для оценки характеристик стохастического гравитационно-волнового фона (SGWB), если он существует.

В последующем для более эффективного разделения сигналов целесообразно применить спектроанализатор с изменяющимся окном данных [8].

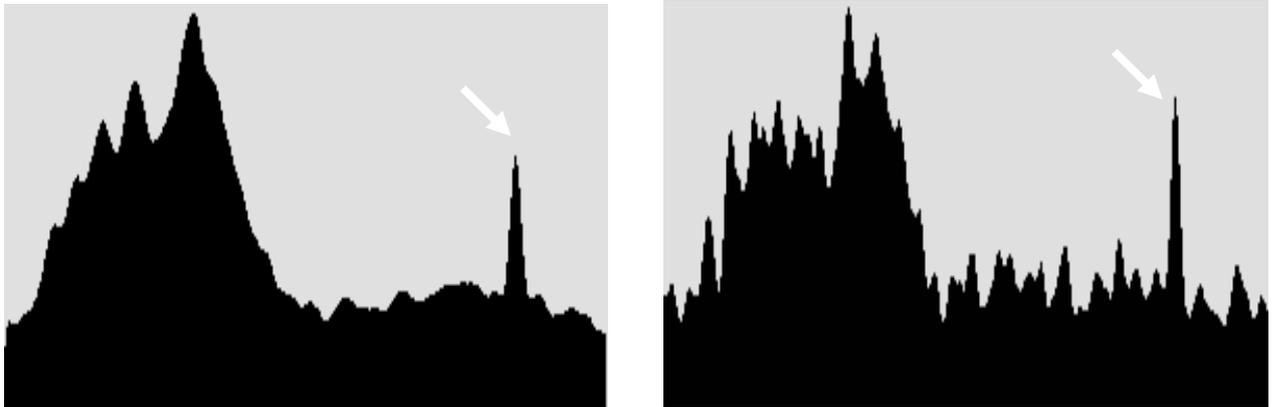


Рис.7. Слева спектр при накоплении 6000 реализаций с дополнительным весовым окном Наттолла (данные амплитудные, масштаб линейный, «пьедестал» удален). Справа – дисперсия процесса накопления спектральных компонент. В обоих случаях к модели гравитационного шума добавлена постоянная монохроматическая помеха -20 дБ (показана стрелками).

Метод когерентного накопления не имеет ограничений на соотношение разделяемых сигналов, т.е. теоретически можно выделить сколь угодно малый сигнал из сколь угодно большого шума. Но практика обычно включает дополнительные ограничения, связанные с особенностями аппаратуры. И если, например, выходной сигнал приемника клиппирован на некотором малом, но физически непреодолимом уровне, или величина мультипликативных компонентов сигналов не может быть снижена, то предел разрешения появится.

Но, несмотря на это, если удастся «заглянуть под шумы аппаратуры» всего лишь на -40... -60 дБ, то это все равно будет отличным результатом, который вряд ли может быть получен другим способом.

Кроме того, для обнаружения низкоамплитудных гравитационных волн может быть полезен коэффициент отношений спектральных энергий в частотной полосе волны относительно энергии всего спектра. Тогда можно будет на записи входного сигнала с погрешностью не более 0.25 секунды указать место для поиска и последующего выделения ожидаемой волны во временной области.

Практическая реализация предлагаемого метода не должна представлять никаких трудностей и будет определяться только необходимым программным обеспечением (при условии уже имеющейся оцифровки аппаратных данных).

Для выбранного косинусквадратичного окна Хеннинга оконная огибающая определяется функцией:

$$u(x) = \begin{cases} \cos^2(\pi x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\pi x)), & |x| \leq 1/2, \\ 0, & |x| > 1/2, \end{cases}$$

а ее нормированный спектр равен:

$$F(y) = \text{sinc}(\pi y) + \frac{1}{2} [\text{sinc}(\pi(y + 1)) + \text{sinc}(\pi(y - 1))], \quad |y = \omega T / 2\pi| < \infty.$$

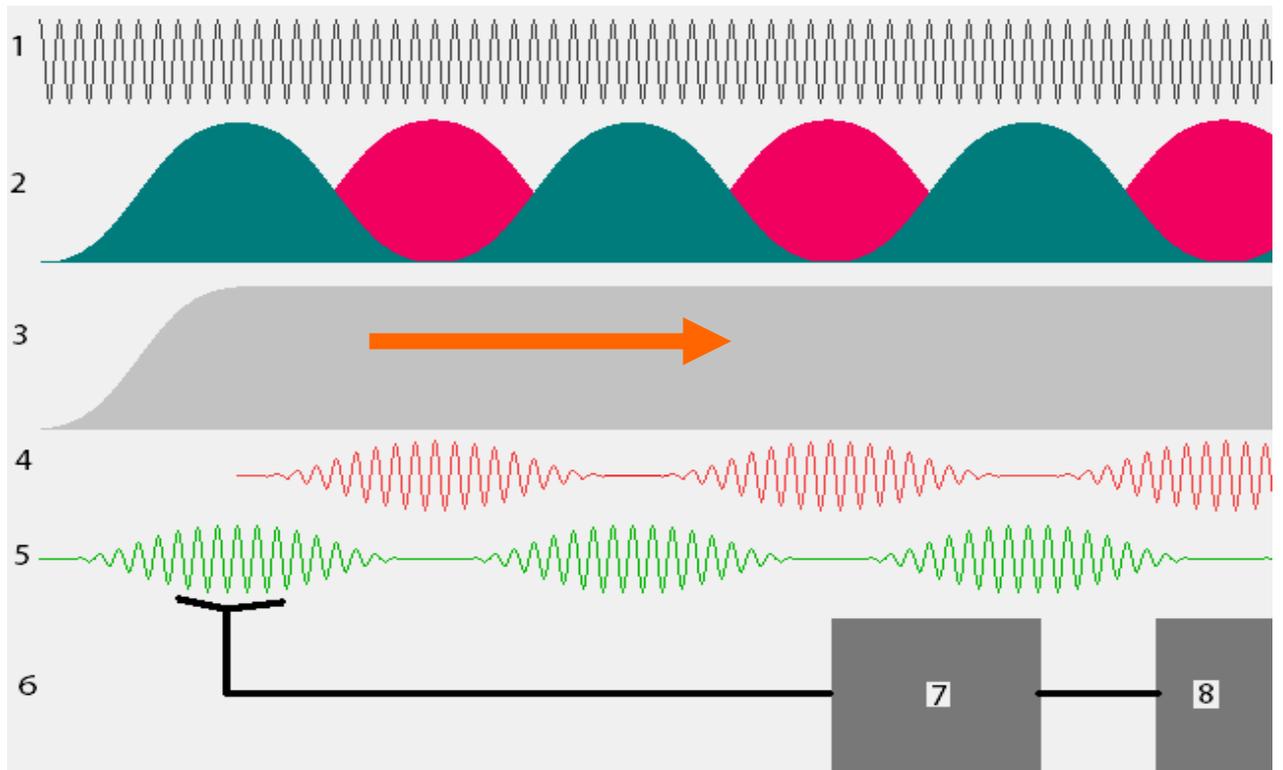


Рис.8. Иллюстрация модифицированного метода Уэлча. 1. Входной сигнал. 2. Четные и нечетные косинусквадратичные окна, образующие «кадры». 3. Оконная огибающая при суммировании кадров. 4 – 5. Четные и нечетные кадры после перемножения на функцию окна. 6. Входные данные для спектрального оценивания. 7. Спектроанализатор. 8. Накопитель данных. Оранжевой стрелкой показано смещение во времени.

Обратим внимание, что при таком построении алгоритма, т.е. суммировании спектральных данных, вследствие половинного «перехлеста» косинусквадратичных весовых окон для любого отсчета во временной области будет обеспечен единичный суммарный оконный коэффициент. В результате можно получить сколь угодно большую (и неискаженную по энергии) реализацию во временной области при любом желаемом частотном разрешении.

Кроме того, вследствие радикального снижения вычислительных затрат можно отказаться от применения БПФ с его ортогональными частотными компонентами и выбрать наиболее подходящий для анализа шумов набор частот. В результате спектроанализатор, адаптированный под данную задачу, сможет работать даже на персональном компьютере конца прошлого века без ограничения времени анализа, т.е. непрерывно.

Промежуточный вывод: предлагаемый метод может быть реализован при использовании уже имеющихся в распоряжении исследователей записей, сделанных с помощью антенн на свободных массах. Успех такого эксперимента будет, несомненно, полезен для теоретических работ в области гравитационной астрономии. Возможный отрицательный результат тоже не окажется бесполезным.

Теперь позволим себе сделать допущение, что спектры гравитационных шумов успешно регистрируются (если это будет не так, то все последующие соображения можно не принимать во внимание). Тогда в качестве необходимого пессимизма следует отметить, что регистрация сверхнизкоамплитудного сигнала инфранизкочастотного диапазона с помощью антенны, имеющей широкую диаграмму направленности, по определению не может быть хорошим решением для построения, допустим, карты гравитационного шума. Было бы большой удачей найти метод регистрации гравитационных шумов в радиочастотном диапазоне, что позволит применить имеющиеся радиотелескопы с остронаправленными антеннами [9].

Используем обычный метод оценки радиотехнического канала связи. В астрономических условиях для поставленной задачи пригодна только передача сигнала «естественным передатчиком» по каналу связи с гауссовым распространением и прием радиотелескопом.

В идеальном случае передатчик транслирует немодулированный монохроматический

сигнал, который распространяется без помех и фиддингов, а приемник уверенно принимает его с хорошим соотношением сигнал/шум. Тогда гравитационное возмущение может вызывать обнаруживаемое воздействие или на параметры передатчика, или на распространение в канале связи, или действовать на сам приемник (в случае достаточно большой апертуры антенн).

Оценим механизм возможного воздействия гравитационного возмущения на передатчик. Общепринято, что гравитационная волна представляет собой распространяющуюся со скоростью, равной скорости света, волну переменных во времени и пространстве градиентов ускорений (части компонент тензора Римана), перпендикулярных направлению волны. Тогда изменение метрики излучающего диска в картинной плоскости под влиянием проходящей гравитационной волны должно каким-то образом изменять эллипс рассеяния сигнала даже при сохранении амплитудно-частотных характеристик. Сделаем осторожное предположение, что эффект изменения параметров эллипса рассеяния будет сходным для случаев прохождения через материальный объект как акустической, так и гравитационной волны (в обоих случаях имеется изменение метрики).

Так как мощной гравитационной волны в распоряжении экспериментаторов нет, и взять ее негде, проведем эксперимент для акустической волны, действующей на радиочастотный источник.

Пусть есть сферическое тело, изотропно излучающее монохроматический радиочастотный сигнал дециметрового диапазона. Для этой модели используем полимерную сферическую емкость, заполненную изотоническим раствором хлорида натрия. Внутри неё помещена еще одна герметичная радиопрозрачная емкость с передатчиком, аккумуляторами и антенной. Учитывая шунтирование и рассеяние радиочастотного сигнала раствором сильного электролита мы можем предполагать, что РЧ излучение нашей модели будет близким к изотропному, что и подтверждается проверкой индикатором поля. К емкости подсоединим длинный диэлектрический толкатель, второй конец которого прикреплен к корпусу электромотора, на валу которого находится эксцентрик.

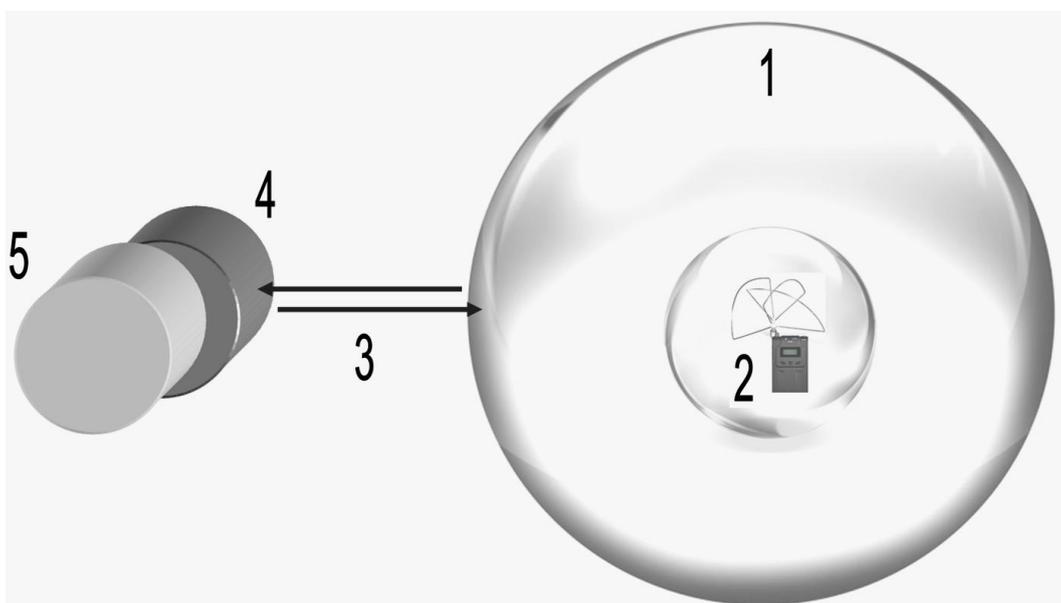


Рис.10. Экспериментальная демонстрационная установка.

1 - Эластичная сферическая емкость с изотоническим раствором NaCl.

2- Герметичная капсула с передатчиком, антенной и источником питания.

3- Диэлектрический толкатель (показан условно).

4- Мотор. 5- Эксцентрик на валу мотора.

Излучаемый радиочастотный сигнал регистрируется приемником, принцип работы которого будет описан ниже. Убедимся, что при отсоединении толкателя и работе мотора не наблюдается никаких отклонений детектированного радиосигнала от нулевой линии. Затем подсоединим толкатель (т.е. теперь вибрации передаются на емкость) и будем регистрировать сигнал после включения мотора, обеспечивающего вращение эксцентрика с увеличивающейся частотой.

При включении мотора, вращающего эксцентрик, на выходе приемника возникали увеличивающиеся по амплитуде и частоте инфранизкочастотные колебания, которые были вызваны изменениями вектора поляризации и/или эллипса рассеяния монохроматического радиочастотного сигнала. Результат работы установки показан на следующем рисунке.

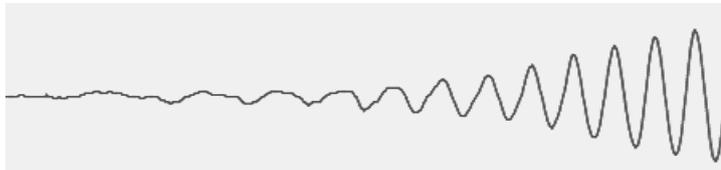


Рис.9. Кривая изменения параметров эллипса рассеяния при включении двигателя и разгоне эксцентрика. Запись сигнала с выхода приемника. Деформация сферы составляла примерно 1×10^{-3} .

Не вызывает сомнений тот факт, что приемник работает и регистрирует изменения эллипса рассеяния излучаемого сигнала. И, разумеется, возможность радиочастотной регистрации механических и акустических колебаний можно считать подтвержденной экспериментально. Если же прохождение гравитационной волны вызывает сходные феномены изменения параметров эллипса рассеяния излучающего объекта, то при выполнении условия масштабной инвариантности, прием и демодуляция такого сигнала также возможны.

Итак, допустим, что светимость диска источника в картинной плоскости при прохождении гравитационной волны изменяется для X и Y приемников на некоторую величину. Предполагаем, что вклад динамического гравитационного линзирования равен нулю. Тогда изменение значений светимости диска в ориентациях X и Y будет соответствовать эквивалентному эллипсу рассеяния для любой из «деформаций», вызванных прохождением ГВ.

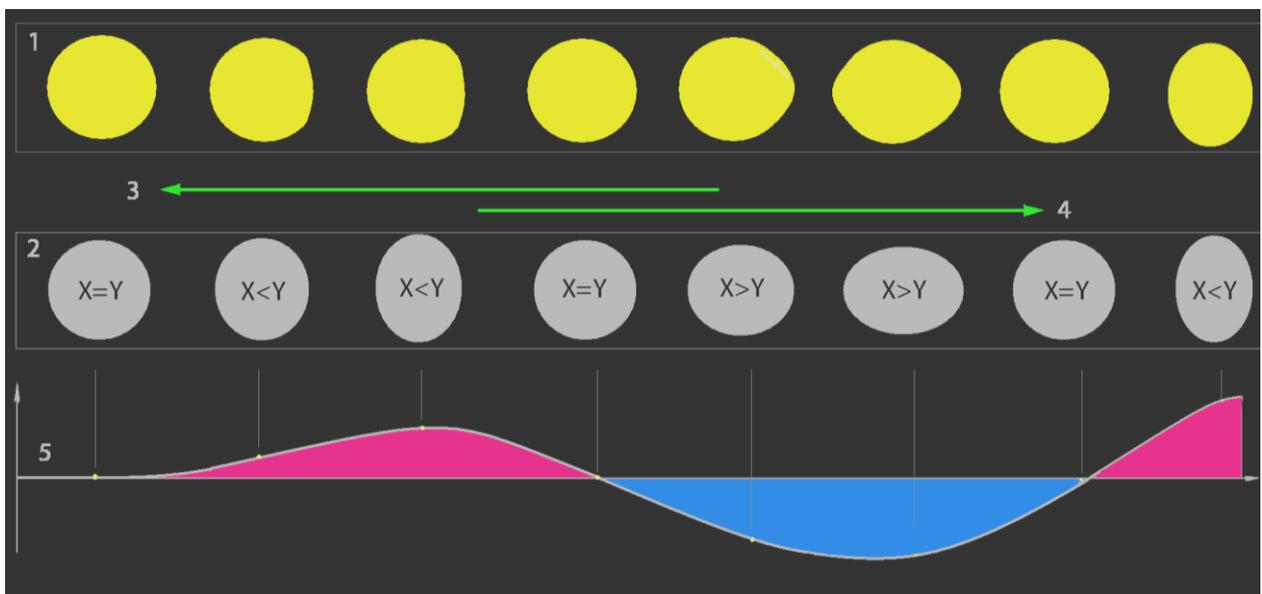


Рис.11. Иллюстрация к эффекту, который может обуславливать сигнал на выходе приемника (предполагается, что длина гравитационной волны сравнима с диаметром источника). 1 – Диск источника РЧ излучения в картинной плоскости под влиянием «деформаций», обусловленных изменением метрики (эффект показан усиленным для наглядности). 2 – Эквивалентные эллипсы рассеяния. 3 – Направление распространения «деформаций». 4 – Направление шкалы времени. 5 – Сигнал на выходе дифференциального амплитудного демодулятора.

Однако ожидать приемлемых значений деформации самого источника радиоизлучения для успешной регистрации бесперспективно, и надеяться получить значения асимметрии эллипса в области 1×10^{-6} и более, вероятнее всего, бесполезно. Исправить положение может только очень мощная ГВ от близкого источника, но подобные события редки и маловероятны. Несколько более оптимистично можно ожидать формирования «раскраски зебры» при прохождении волны через диск, диаметр которого намного больше ее длины.

Т.е. или излучающая поверхность изменяет поляризацию сигнала, или в проходящих по диску «светлых» и «темных» полупериодах ГВ происходит разнонаправленное отклонение излучения по азимуту, углу места или по промежуточному углу.

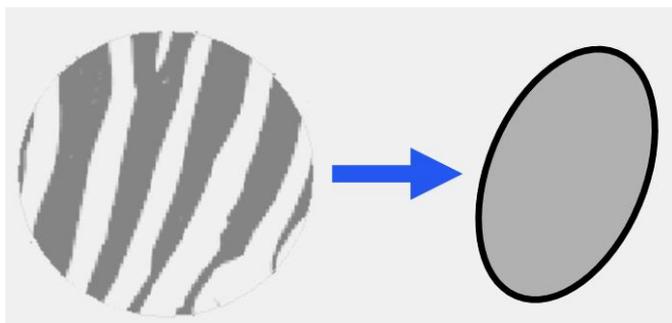


Рис.12. Гипотетическая разнояркостная рябь при прохождении ГВ по диску источника излучения и эквивалентный эллипс рассеяния.

В целом, можно сделать предположение, что надежды использовать механизм воздействия ГВ на передатчик для целей их регистрации вряд ли оправдаются.

Однако для приемника несущественно: имеются ли истинные деформации диска или его изображение каким-то образом искажено при прохождении сигнала через линзирующую область. Следует оговориться, что существует хорошо аргументированное мнение [10] о полном отсутствии влияния гравитационных волн на распространение света, и соответственно, других высокочастотных электромагнитных сигналов. Но в настоящее время существует и проекты, где предполагается что: «проходящие гравитационные волны изменяют устойчивую картину света, исходящего от пульсаров, увеличивая или сжимая относительные расстояния, которые эти лучи проходят через пространство». Совместить одно с другим невозможно, но как заметил Р. Фейнман: «...только в случае неуверенности в результатах и сомнениях в теории существует наука».

Гравитационное (но не гравитационно-волновое!) линзирование в оптическом диапазоне хорошо известно, и к нему имеются многочисленные детальные иллюстрации, а эффект относится к области доказанных. С учетом этих фактов можно предполагать, что в радиочастотном диапазоне при прохождении через «длинное плечо» гравитационной волны все же будет возникать если не линзирование, то хотя бы кратковременный феномен астигматизма основного лепестка диаграммы направленности антенны. Т.е. искажения будут наблюдаться в канале связи, что приведет к изменению эллипса рассеяния в картинной плоскости наблюдателя. В таком случае основным фокусирующим элементом будет эквивалент не сферической, а цилиндрической линзы. Метод ожидается потенциально достаточно чувствительным, т.к. астигматизм требуется только в области проекции источника, т.е. ничтожно малом телесном угле.

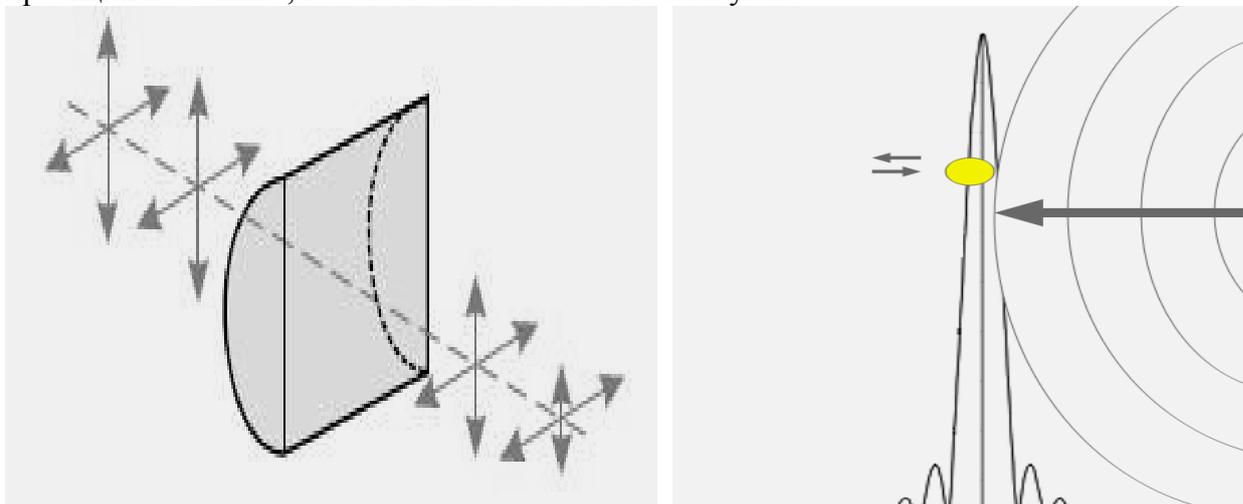


Рис.13. Формирование цилиндрических линз при прохождении ГВ через основной лепесток ДНА (слева иллюстрация хода лучей через линзу, справа – ожидаемое влияние гравитационной волны на распространение радиочастотного сигнала).

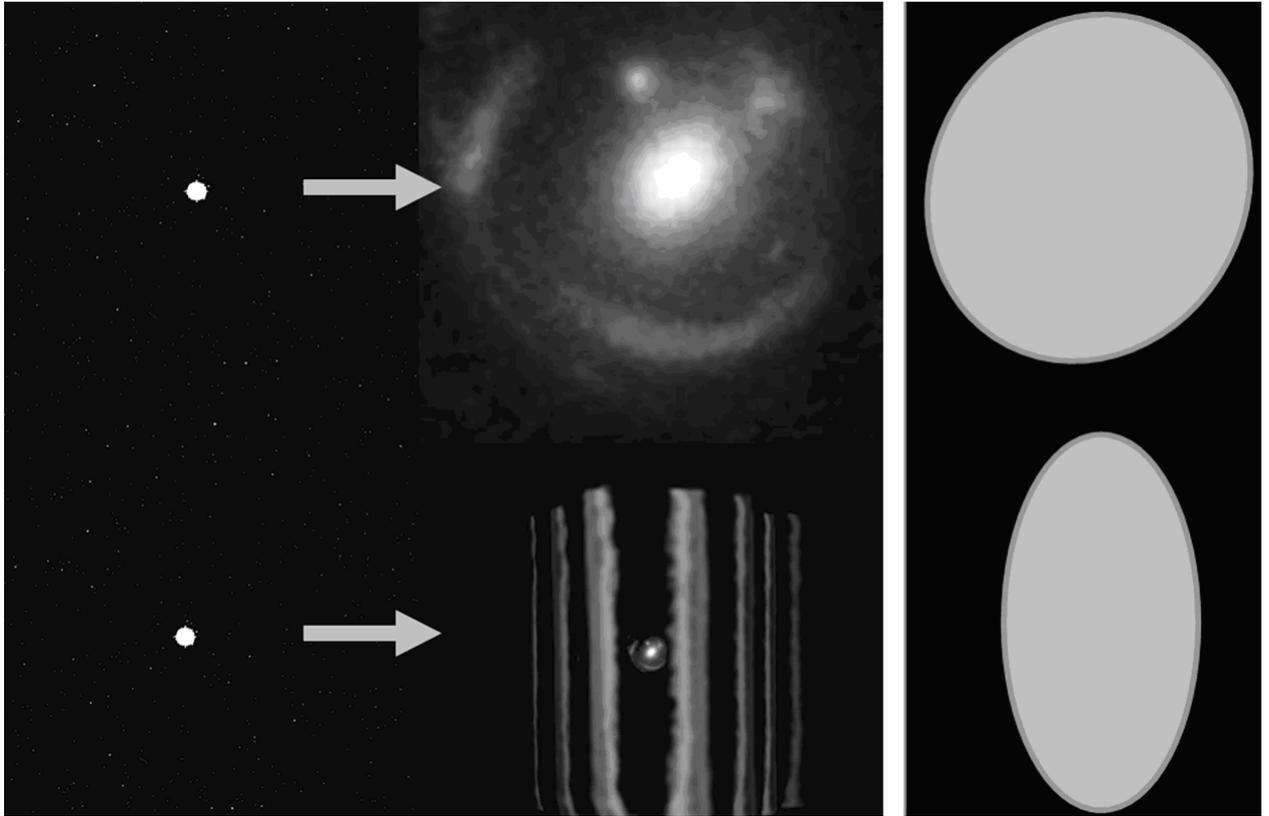


Рис. 14. Возможное изменение эллипса при прохождении сигнала через цилиндрическую линзу (внизу), сверху – иллюстрация классического оптического линзирования.

Учтем, что в канале связи астрономической протяженности может происходить что угодно, и любое категорическое отрицание может быть опрометчиво, т.к. например, амплитудная модуляция(!) была предсказана, а потом и зарегистрирована в виде межпланетной сцинтилляции [11]. Но в данном случае имеется избыточное количество предположений и допущений, что резко повышает вероятность фатальной для проекта ошибки. Т.е. для схемы регистрации, показанной ниже, требуется удачное сочетание нескольких одновременных событий.

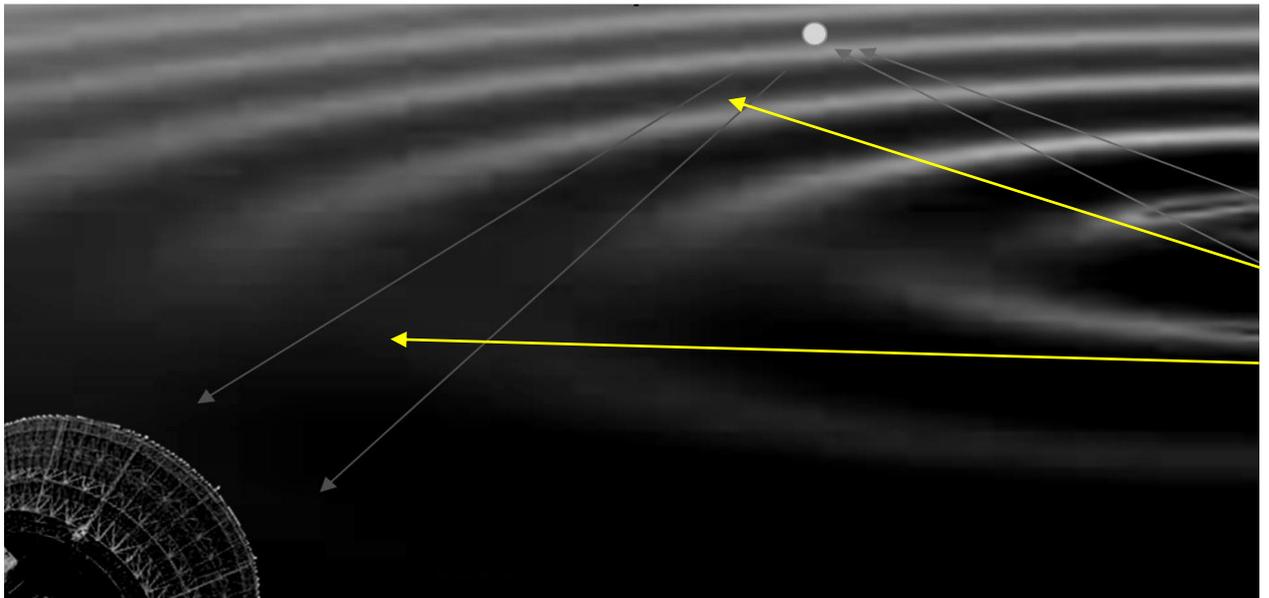


Рис.15. Предполагаемая схема не прямой регистрации гравитационных волн.
 1 - Источник ГВ (справа). 2 - Астрофизический объект, излучающий в радиочастотном диапазоне (вверху). 3 – Остронаправленная квадратная антенна (слева).
 Желтыми стрелками показано ожидаемое воздействие на канал связи.
 Предполагается также, что расстояние 1-2 много меньше расстояния 1-3.

Рассматривать явно экзотический вариант воздействия ГВ на радиочастотные антенны приемного устройства не будем.

Итак, в результате даже очень поверхностной оценки перспектив радиочастотной регистрации становится понятен выбор исследователей LIGO в пользу «прямого» гравитационного приема.

Остается единственный вариант решения поставленной задачи: использовать сигнал реликтового излучения в надежде обнаружить гравитационный шум, характеристики которого предварительно определены с помощью предлагаемого метода накопления спектров при «прямом» приеме. Разумеется, сигналов гравитационной волны увидеть не удастся, а вот их следы в виде характерного изменения спектра динамики эллипса рассеяния – весьма вероятно. Приемник, пригодный для решения этой задачи, может иметь конструкцию, описанную ниже.

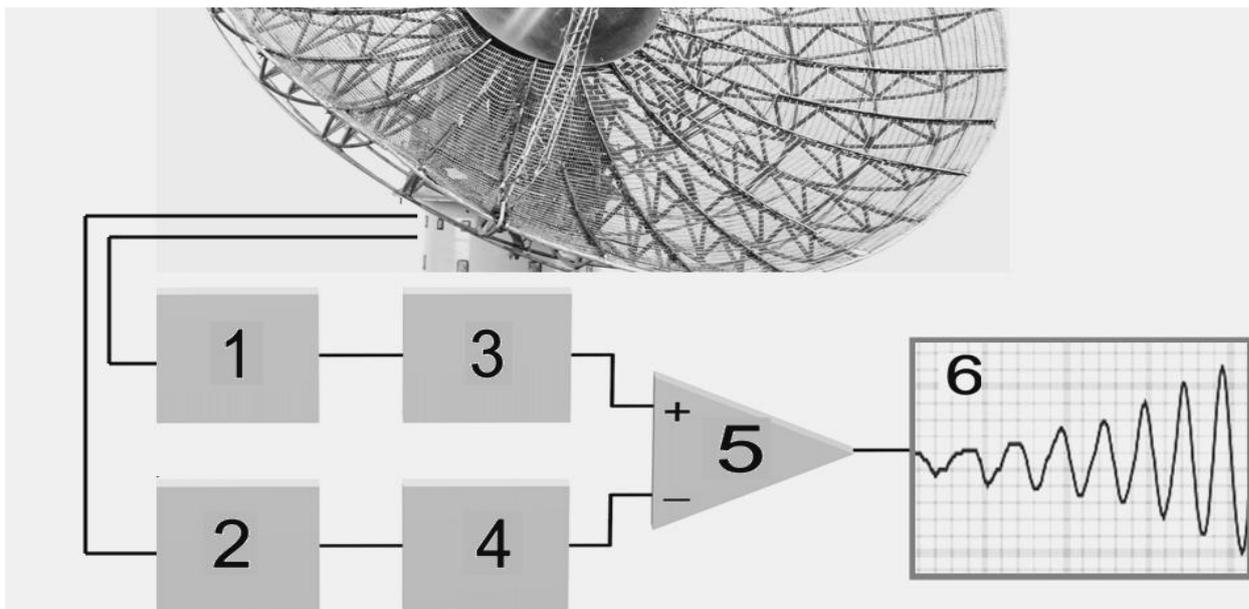


Рис.16. Блок-схема приемника, регистрирующего изменение параметров эллипса рассеяния (более подробное описание в [12]). 1- Приемник X поляризованного сигнала. 2- Приемник Y поляризованного сигнала. 3-4 -Логарифмические детекторы. 5 - Дифференциальный усилитель. 6- Регистратор.

Блок-схема приемника соответствует требованию обнаруживать любые изменения ориентации эллипса рассеяния и/или его сжатия/растяжения.

Основными недостатками схемы будут недостаточная линейность при больших углах поворота поляризации и возможность высокоамплитудных бросков выходного сигнала при переходе через границу квадранта (что может быть устранено при увеличении канальности приема).

Сейчас уже известно, что сигнал гравитационной волны имеет нулевое математическое ожидание на декасекундных реализациях, т.е. никаких «остаточных деформаций» не наблюдается. Поэтому детекторные каскады приемника не должны быть усилителями постоянного тока, а ограничение полосы пропускания снизу может быть выбрано в области единиц/десятков секунд.

Для минимизации просачивания внеполосных шумов полоса пропускания радиочастотных усилителей должна быть ограничена величиной в сотни герц (что близко к стандартным значениям). Если предполагать наличие аддитивного линейно поляризованного фона сигналов, то в каждом канале должна быть система АРУ с постоянной времени, согласованной с требованиями ограничения полосы детектированных сигналов. Для случаев существенных импульсных широкополосных помех целесообразно использовать отдельные системы ШОУ в каждом канале.

Необходимо учитывать, что описываемый приемник не пригоден для канонической поляриметрической оценки сигналов [13], и может выделять только переменную

составляющую поворота вектора поляризации и/или изменение эллиптичности, причем отличить поворот от сжатия/растяжения эллипса будет невозможно.

Разумеется, соединение подобных приемников в «пакет», покрывающий широкий частотный диапазон, с последующей медианной фильтрацией синхронных отсчетов, может существенно улучшить соотношение сигнал/шум на выходе.

Необходимо отметить также, что любые угловые модуляции входного сигнала не будут вызывать отклика на выходе приемника, т.к. в схеме используется дифференциальное амплитудное детектирование. В свою очередь амплитудная модуляция входного сигнала будет подавлена на коэффициент ослабления синфазного сигнала дифференциального усилителя, и эта величина может достигать сотни децибел. Т.е., например, радиовсплеск, не изменяющий эллиптичность сигнала, не вызовет никакой реакции на выходе.

Если радиовсплеск «скользит по частотам», то многоканальная система таких приемников вполне успешно скорректирует возникающие погрешности. В случае же изменения поляризации сигнала в процессе развития радиовсплеска медианная фильтрация существенно уменьшит возникающие артефакты (для многоканальной разнесенной по частотам системы).

Вывод: хотелось бы надеяться (но только в случае успеха первого этапа), что когерентное накопление спектров радиочастотного сигнала при большой экспозиции позволит приблизиться к регистрации шумовых гравитационных феноменов. В идеальном варианте с помощью радиочастотного метода может быть получена карта гравитационного шума.

Литература:

1. <https://www.nature.com/articles/s42254-021-00303-8>
2. <https://mathworld.wolfram.com/SweepSignal.html>
3. https://advancedligo.mit.edu/adligo_news.html
4. <https://www.twirpx.com/file/1217731/>
5. <http://jre.cplire.ru/jre/mar12/1/text.html>
6. <https://www.semanticscholar.org/paper/The-use-of-fast-Fourier-transform-for-the-of-power-Welch/e63345b4243e2376720a4e66373fdffe7a7d6be>
7. <https://www.ligo.org/science/Publication-GW150914Astro/flyer.pdf>
8. <http://www.tredex-company.com/en/content/spectral-analysis-variable-data-window>
9. <https://academic.oup.com/mnras/article/469/1/656/3573851>
10. <https://arxiv.org/pdf/gr-qc/9802019v1.pdf>
11. [Solar and Interplanetary Disturbances. ISBN 978-981-02-2925-2.](#)
12. <https://www.nature.com/articles/s41598-021-84500-6>
13. <https://edu.tusur.ru/publications/2887/download>